Introducción a la Teoría Microeconómica (versión preliminar)

Andrés Carvajal
University of Western Ontario
acarvaj@uwo.ca

Alvaro J. Riascos Villegas
Universidad de los Andes
ariascos@uniandes.edu.co

Julio de 2014

Índice

1. Introducción

- Vamos a estudiar la actividad económica desde un punto de vista desagregado. Es decir, queremos estudiar de forma individual las unidades básicas o actores principales que tienen relevancia desde el punto de vista económico así como la forma como éstos interactúan.
- Los principales actores son: los consumidores, las firmas y el gobierno.
- Estos interactuan mediados por una serie de instituciones. Desde el punto de vista de estas notas, la principal institución mediadora es el mercado y el sistema de precios. También estudiaremos otra tipo de instituciones relacionadas con mecanismos de asignación de recursos como las subastas o algunos mecanismos de elección social; así como el papel de las instituciones cuando la información relevante para los actores es imperfecta o, cuando no existen derechos de propiedad bien definidos.
- En el caso de los consumidores y firmas nuestro objetivo es determinar y describir cuales son las asignaciones individuales (en el caso de los consumidores) y niveles de producción (en el caso de las firmas) resultantes de esta interacción y qué propiedades tienen desde el punto de vista social e individual.
- Para casi todo el curso, nuestro marco de referencia teórico será la teoría del equilibrio general. Si bien esta es una teoría muy idealizada de la actividad económica, nos permite entender cómo funcionaría la realidad en un contexto ideal y así entender las desviaciones de la realidad de la teoría. Los resultados principales son los dos teoremas fundamentaes del bienestar que discutiremos ampliamente más adelante.
- Comenzamos describiendo formalmente el comportamiento individual de uno de los principales actores.

2. Teoría del consumidor

Un consumidor es un caso particular de un agente que toma decisiones. En general, un tomador de decisiones se modela como una *estructura de escogencia* que consiste de tres elementos $(X, \succsim, \mathcal{B})$, donde X representa el espacio en el que el agente puede tomar decisiones, $\succsim$ es una relación binaria en X que determina las preferencias del agente sobre X y $\mathcal{B}$ es una familia de subconjuntos de X; las asignaciones factibles en las que él podría escoger. Este último depende de carcaterísticas específicas como restricciones institucionales, precios (en el caso en que los elementos de $\mathcal{B}$ son restricciones presupuestales), etc. Más explícitamente:

- $X \neq \varnothing$ es el espacio de elección del agente: el conjunto de todas las alternativas que el agente podría, concebiblemente, elegir, más allá de retricciones de factibilidad o de sus gustos.

- $\succsim$ es una relación binaria en X (es decir, un subconjunto de $X \times X$): si $x, x' \in X$, $x \succsim x'$ quiere decir que el agente encuentra a x al menos tan bueno como x'.[1]
- Si $B \in \mathcal{B}$, quiere decir que el agente enfrenta el problema de escoger $x \in B \subseteq X$.

El supuesto de *comportamiento* que haremos sobre los consumidores es que, cuando el agente tiene que escoger en el conjunto de alternativas factibles $B \in \mathcal{B}$, éste escoge un elemento que es máximo con respecto a $\succsim$. Esto es: el agente escoge $x \in B$ si para todo $x' \in B$ tenemos $x \succsim x'$. Para que este problema esté bien definido, es necesario hacer algunos supuestos sobre estos tres objetos. Dado que nuestro objetivo es estudiar los consumidores, lo que haremos a continuación es hacer estos supuestos para el caso concreto del problema de elección del consumidor.

2.1. Espacio de consumo

Vamos a suponer aquí que existen $L \geqslant 1$ bienes. Por bien entendemos cualquier objeto tangible o intangible que es sujeto de intercambio. Implícitamente, estamos suponiendo que nuestros agentes conocen los bienes con mucha precisión y que son capaces de medirlos. Así, definimos $X = \mathbb{R}^L_+$. Luego suponemos que los bienes son perfectamente divisibles y se miden en cantidades no negativas. Un elemento $x \in X$ lo llamamos una cesta de consumo.

2.2. Preferencias y funciones de utilidad

Necesitamos las siguientes definiciones:

Definición 1 (Axiomas de racionalidad) $\succsim$ *es racional si,*

1. Es completa: $\forall x, x' \in \mathbb{R}^L_+$, $x \succsim x'$ ó $x' \succsim x$ (o ambas).
2. Es transitiva: $\forall x, x', x''$, si $x \succsim x'$ y $x' \succsim x''$, entonces $x \succsim x''$.

Ejemplo 1 *(Preferencias definidas a partir de funciones). Sea $u : X \to \mathbb{R}$ cualquier función y definamos la siguiente relación de preferencia $x \succsim_u y \Leftrightarrow U(x) \geq U(y)$. $\succsim_u$ es racional y la llamamos la relación de preferencia inducida por la función u.*

Ejemplo 2 *(Orden Lexicográfico). Definamos la siguiente relación: $(x_2, y_2) \succsim_L (x_1, y_1) \Leftrightarrow x_2 > x_1$ o, si $x_2 = x_1$ y $y_2 \geq y_1$. $\succsim_L$ es racional.*

Ejemplo 3 *Defina una relación en $X = R^L_+$ de la siguiente manera: $x \succsim y \Leftrightarrow x \geq y$.[2] Entonces, $\succsim$ no es una relación de preferencia racional para $L \geq 2$.*

[1] Estrictamente, $x \succsim x'$ es una forma de escribir $(x, x') \in \succsim$

[2] Dados dos vectores $x, y \in R^L$, decimos que $x \geq y$ si y sólo si $x_i \geq y_i$, $i = 1, ..., L$.

Ejercicio 1 *Considere la siguiente relación* $(x_2, y_2) \succsim (x_1, y_1)$ *si y sólo si:* $(2x_1 + 1)2^{y_2} \leq (2x_2 + 1)2^{y_1}$. *¿Es ésta una relación de preferencia racional?*

Apartir de $\succsim$ definimos otras dos relaciones binarias sobre X:

1. La relación de *preferencia estricta* $\succ$ esta definida por: $x \succ y \Leftrightarrow x \succsim y$ pero no es verdad que $y \succsim x$. En este caso decimos que x es estrictamente preferible a y.

2. La relación de *indiferencia* $\sim$ esta definida por: $x \sim y \Leftrightarrow x \succsim y$ y $y \succsim x$. En este caso decimos que x es indiferente a y.

Las propiedades básicas de estas relaciones son:

Ejercicio 2 *Demuestre lo siguiente. Si* $\succsim$ *es racional entonces:*

1. $\succ$ *es irreflexiva:* $\forall x \in \mathbb{R}^L_+$, *no es cierto que* $x \succ x$.

2. $\succ$ *es transitiva.*

3. $\sim$ *es reflexiva:* $\forall x \in \mathbb{R}^L_+$, *es cierto que* $x \sim x$.

4. $\sim$ *es transitiva.*

5. $\sim$ *es simétrica: si* $x \sim x'$, *entonces* $x' \sim x$.

Completitud es relativamente razonable. Si los agentes conocen bien los bienes como hemos supuesto, entonces ellos deberían saber qué les gusta más y qué menos. El supuesto de transitividad es más controversial pues hay evidencia experimental de que los seres humanos habitualmente no lo cumplimos sin embargo, resulta fundamental para el desarrollo de la teoría.

- Crítica a la completitud: no es facil evaluar alternativas muy diferentes.

- Crítica a la transitividad: puede violarse cuando las diferencias son casi imperceptibles. Suponga que nos piden escoger entre diferentes colores para una casa. Todos los colores son versiones ligeramente diferentes de azul (sea x azul agua marina y z azul pastel):

$$z \sim y_n \sim ... \sim y_1 \sim x$$

en particular:

$$z \succsim x$$

sin embargo, si nos piden evaluar entre z y x probablemente nuestras preferencias son $x \succ z$.

Definición 2 (Axioma de continuidad) *Decimos que una relación de preferencia es continua si:* $\forall x \in \mathbb{R}^L_+$, $\{x' : x' \succsim x\}$ *y* $\{x' : x \succsim x'\}$ *es cerrado en* $\mathbb{R}^L_+$.

- La primera parte de la definición de continuidad también se llama semicontinuidad superior. La segunda, semicontinuidad inferior.

Ejemplo 4 *(Orden Lexicográfico). $\succsim_L$ no es continua.*

Ejercicio 3 *(Preferencias definidas a partir de funciones). $\succsim_u$ es continua si y sólo si u es continua.*

Ejercicio 4 *Muestre que la siguiente definición de continuidad es equivalente a la dada anteriormente. Una relación de preferencia $\succsim$ sobre $\mathbb{R}_+^L$ es continua si para todo x, $y \in X$ tal que $x \succ y$ y para todo par de secuencias $\{x_n\}, \{y_n\}$ en X tales que $x_n \to x$, $y_n \to y$ tenemos que $x_n \succ y$ y $x \succ y_n$ para todo n lo suficientemente grande.*

La definición anterior quiere decir que si un agente tiene preferencias continuas y el prefiere estrictamente una canasta a otra entonces, canastas muy cercanas (o similares) a la primera, continuarán siendo estrictamente preferibles a la segunda.

- Los siguientes conjuntos serán utilizados frecuntemente. Definimos: $\{x' : x' \succsim x\}$ como el conjunto de canastas débilmente preferibles a x y lo denotamos por $\succsim x$, $\{x' : x' \succ x\}$ es el conjunto de las canastas estrictamente preferidas (o simplemente preferidas) a x y los denotamos por $\succ x$, $\{x' : x' \sim x\}$ es el conjunto de las canastas que son indiferentes a x y lo denotamos $\sim x$ y definimos de forma análoga los conjuntos: $x \succsim$ y $x \succ$, llamados el conjunto de los débilmente inferiores y estrictamente inferiores (o simplemente inferior) a x, respectivamente.

Ahora, en economía estamos acostumbrados a trabajar sobre la base de curvas de indiferencia en el espacio de consumo son convexas al origen. La forma que habitualmente suponemos que tienen las curvas de indiferencia deben deducirse de supuestos acerca de la relación $\succsim$.

Estos supuestos son de dos clases: los de la forma misma y los de la dirección de mejora. Los de la forma son postulados que dicen que los agentes prefieren canastas "balanceadas" a canastas "desbalanceadas," mientras que los de dirección de mejora dicen que los agentes prefieren más a menos. En términos de $\succsim$, estos supuestos se pueden hacer de diferentes formas. Sobre la primera propiedad, hay dos versiones:

Definición 3 (Axioma de convexidad) *$\succsim$ es convexa si $\forall x, x' \in \mathbb{R}_+^L$ tales que $x \succsim x'$ y $\forall \theta \in [0,1]$, $\theta x + (1-\theta)\, x' \succsim x'$.*

Definición 4 (Axioma de convexidad estricta) *$\succsim$ es estrictamente convexa si $\forall x, x' \in \mathbb{R}_+^L$ tales que $x \succsim x'$ y $x \neq x'$ y $\forall \theta \in (0,1)$, $\theta x + (1-\theta)\, x' \succ x'$.*

La convexidad le da a las curvas de indiferencia su forma habitual, pero permite que haya trozos rectos en ellas. La convexidad estricta elimina esta posibilidad.

Ejercicio 5 *Demuestre que si* $\succsim$ *es estrictamente convexa, entonces es convexa.*

Ahora, para poder estudiar la propiedad de que más es mejor, necesitamos definir qué quiere decir "más" en $\mathbb{R}^L$, lo cual puede no ser obvio cuando $L > 1$.

Notación 1 *Para* $x = (x_1, ..., x_L), x' = (x'_1, ..., x'_L) \in \mathbb{R}^L$, *decimos que:*

- $x \geqslant x'$ *si* $\forall l \in \{1, ..., L\}$ $x_l \geqslant x'_l$.
- $x > x'$ *si* $x \geqslant x'$ *y* $x \neq x'$.
- $x \gg x'$ *si* $\forall l \in \{1, ..., L\}$ $x_l > x'_l$.

Con la ayuda de esta notación podemos definir más reestricciones sobre las relaciones de preferencia.

Definición 5 (Axioma de monotonicidad estricta) $\succsim$ *es estrictamente monótona si* $\forall x, x' \in \mathbb{R}^L_+$, $x \geq x'$ *implica que* $x \succcurlyeq x'$ *y si* $x >> x'$ *entonces* $x \succ x'$.[3]

Notación 2 *Monotonicidad estricta es lo mismo que las preferencias sean estrictamente crecientes.*

- Obsérvese que monotonicidad estricta es una hipótesis más fuerte que no-saciabilidad local.
- Monotonicidad estricta implica que en cualquier punto, el ortante abierto superior a él está estrictamente por encima de la curva de indiferencia y que los bordes son débilmente preferibles.

Ejemplo 5 *(Leontief). Las preferencias de Leontief son estrictamente monótonas y convexas pero nos son estrictamente convexas.*

Ejemplo 6 *(Orden Lexicográfico).* $\succsim_L$ *es estrictamente convexa y estrictamente monótona.*

Ejercicio 6 *Sea* $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$. *Dibujar los conjuntos débilmente preferibles y las curvas de indiferencia de una canasta arbitraria e ilustrar todos los axiomas gráficamente.*

Ejemplo 7 *(Tasa Marginal de Sustitución). Sea* $\succsim$ *una relación de preferencia racional sobre* $\mathbb{R}^L_2$ *tal que los conjuntos de indiferencia sean en efecto çurvas suaves"(véase figura). La tasa marginal de sustitución (TMS) del bien* 2 *por el bien* 1 *en el punto* (x_1, x_2) *se define como el valor absoluto de la pendiente de la recta tangente a la curva de indiferencia que pasa por ese punto. Ésta mide qué tanto está dispuesto el consumidor a dar del bien* 2 *a cambio de una unidad del bien* 1. *Denotamos ésta por* $TMS_{1,2}(x_1, x_2)$. *Usualmente, suponemos que la*

[3] Esta definición es la misma Jehle y Reny [2001] y es distinta a la definición de Mas-Colell, Whinston y Green [1995]. La definición de monotonicidad estricta de Mas-Colell, Whinston y Green [1995] es más fuerte que la defininción de Jehle y Reny [2001].

TMS es decreciente en el primer bien. Esto es, entre más tenemos del bien 1 menos estamos dispuestos a entregar del bien 2 a cambio de una unidad del bien 1. Es fácil ver que si $\succsim$ es convexa entonces la $TMS_{1,2}(x_1, x_2)$ es decreciente en el primer bien.

Un forma de calcularla es la siguiente. En el caso de la figura de arriba, supongamos que $\succsim$ se deriva de una función u diferenciable y que la función $x_2 = f(x_1)$ describe la curva de indiferencia de esta figura. Enotonces, es fácil ver que para todo x_1, se cumple $u(x_1, f(x_1)) = c$, donde c es una constante. Luego,

$$\frac{\partial u(x_1, f(x_1))}{\partial x_1} + \frac{\partial u(x_1, f(x_1))}{\partial x_2} f'(x_1) = 0$$

y por lo tanto,

$$TMS_{1,2}(x_1, f(x_1)) = |f'(x_1)| = -f'(x_1) = \frac{\frac{\partial u(x_1, f(x_1))}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1, f(x_1))}{\partial x_2}}$$

Ahora, los economistas solemos utilizar un objeto artificial que denominamos la función de utilidad. Aunque este artificio no es absolutamente necesario en la construcción de la teoría del equilibrio general, su uso permite utilizar todas las herremientos del cálculo diferencial y así, desde el punto de vista matemático, el comportamiento de los agentes se simplifica considerablemente. Vamos a seguir aquí esa convención aunque al hacerlo perdemos algo de generalidad.

Definición 6 (Representabilidad de preferencias por funciones de utilidad) *Una relación de preferencia $\succsim$ en $\mathbb{R}_+^L$ es representable por una función de utilidad u, si existe una función $u : \mathbb{R}_+^L \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $u(x) \geqslant u(x')$ si y sólo si $x \succsim x'$. Es decir, si existe u tal que $\succsim = \succsim_u$. En este caso se dice que u representa a $\succsim$. Llamamos a cualquier función u que represente $\succsim$ una función de utilidad asociada a $\succsim$.*

Obsérvese que esta representación no es única: Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, entonces $v = f \circ u$ representa a $\succsim$. De hecho se puede demostrar que si v y μ representan la mismas preferencias entonces existe $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente creciente tal que $v = f \circ u$.

Ejercicio 7 *Muestre que en la afirmación anterior es necesario que f sea estrictamente creciente.*

Dado que nuestro concepto básico (primitivo) sobre la escogencia de los agentes es el concepto de relación de preferencia, la primera pregunta que deberíamos de hacer es, ¿Cuando una relación de preferencia es representable por una función de utilidad? En uno de los ejemplos anteriores mostramos que si $u : \mathbb{R}_+^L \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función entonces la relación de preferencia inducida por u es racional. Luego una condición necesaria para que una relación de preferencia sea representable es que sea racional. En efecto, solo un poco más es suficiente:

Teorema 1 *Toda relación de preferencia racional y continua sobre* $\mathbb{R}_+^L$ *puede ser representada por una función de utilidad continua.*

Ejemplo 8 *El orden lexicográfico no es representable por una función de utilidad. Que no sea representable por una función de utilidad continua es una consecuencia de uno de los ejercicios anteriores, sin embargo que no sea representable por cualquier tipo de función no es completamente trivial (Véase Araujo [2004]).*

Ejercicio 8 *Demuestre lo siguiente: si* u *representa a* $\succsim$*, entonces*

1. $x \succ x'$ *si, y sólo si,* $u(x) > u(x')$.
2. $x \sim x'$ *si, y sólo si,* $u(x) = u(x')$.

Las características de las preferencias se traducen en características de las funciones de utilidad que las representan.

Definición 7 *Sea* $X \subseteq \mathbb{R}_+^L$ *un conjunto convexo y* $f : X \to \mathbb{R}$*. Decimos que* f *es cuasicóncava si* $\forall x, x' \in X,\ x \neq x'$ *y* $\forall \theta \in (0,1),\ f(\theta x + (1-\theta)\, x') \geq \min\{f(x), f(x')\}$*. Decimos que* f *es estrictamente cuasicóncava cuando* $\geq$ *se puede remplazar por* $>$.

Ejercicio 9 *Demuestre lo siguiente: si* u *representa a* $\succsim$*, entonces*

1. *Si* $\succsim$ *es convexa, entonces* u *es cuasicóncava.*
2. *Si* $\succsim$ *es estrictamente convexa, entonces* u *es estrictamente cuasicóncava.*
3. *Si* $\succsim$ *es estrictamente monótona, entonces* u *es estrcitamente monótona creciente.*
4. *Probar que toda función estrictamente monótona de* R *en* R *es estrictamente cuasicóncava.*
5. *Sea* X *un conjunto finito y* $\succsim$ *una relación de preferencia racional sobre* X*, mostrar que existe una función de utilidad que la representa.*
6. *Dar un ejemplo de una función cuasicóncava que no sea cóncava.*
7. *Considere las tres relaciones de preferencia definidas por las siguientes funciones:*

   a) $u_1(x, y) = xy$

   b) $u_2(x, y) = \min\{x, y\}$

   c) $u_3(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

Haga un dibujo de las curvas de indiferencia y conjuntos débilmente preferidos a una canasta arbitraria y clasifique las preferencias asociadas de acuerdo a si son continuas, monótonas, estrictamente monótonas, convexas, etc.

8. *¿Puede una relación de preferencia continua tener una representación no continua?*

9. *Sean u_i con $i = 1...n$, n-funciones cóncavas (estrictamente) y α_i con $i = 1...n$ números no negativos (no todos iguales a cero), demostrar que la función $u = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i u_i$ es cóncava (estrictamente).*

2.3. Canastas factibles

Nos queda por estudiar el objeto $\mathcal{B}$. Como es habitual, definimos, para todo $p \in \mathbb{R}^L_{++}$ y todo $y \in \mathbb{R}_+$ la restricción presupuestal como el conjunto:

$$B(p, y) = \left\{x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x \leqslant y\right\}$$

La familia $\mathcal{B}$ se define como el conjunto de todos los posibles conjuntos presupuestales:

$$\mathcal{B} = \left\{B \subseteq \mathbb{R}^L : \exists (p, y) \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_+ : B(p, y) = B\right\}$$

Suponemos que cuando el agente enfrenta un conjunto presupuestal definido por precios p e ingreso y, escoge un elemento que es máximo con respecto a sus preferencias $\succsim$ (esta es nuestra hipótesis sobre el comportamiento de los consumidores).

3. Demanda Marshalliana

Cuando las preferencias son representables por una función de utilidad nuestra hipótesis sobre el comportamiento de los consumidores se puede plantear como el siguiente problema llamado el *problema del consumidor* (PC):

$$\max_{x \in B(p,y)} u(x)$$

Teorema 2 *Cuando las preferencias son representables por una función de utilidad continua, existe una solución al problema del cosumidor.*

Prueba. Como $y \geqslant 0$ y $p \gg (0, ..., 0)$, el conjunto $B(p, y)$ es compacto. Esto es suficiente para la existencia de un maximizador. ■

Cualquier x que solucione el anterior problema es una demanda óptima para el consumidor. Como la demanda es un elemento fundamental de nuestra teoría, en adelante siempre supondremos que $\succsim$ es representable por una función de utilidad continua u.

Teorema 3 *Si u es cuasicóncava y $x, x' \in \mathbb{R}^L_+$ son soluciones al problema de maximización a precios p e ingreso y, entonces $\forall \theta \in [0,1]$, la canasta $\theta x + (1-\theta) x'$ también es solución al problema.*

Prueba. Queda como ejercicio. ■

Teorema 4 *Si u es continua y estrictamente cuasicóncava entonces para todo p y todo y, la solución al problema de maximización es única.*

Prueba. Queda como ejercicio. ■

Definición 8 *Sea u continua y estrictamente cuasicóncava entonces por la proposición anterior podemos definir la función de demanda marshalliana como $x : R^L_{++} \times R_+ \to R^L_+$ donde $x(p, y)$ es la solución al problema del consumidor cuando los precios son p y la riqueza inicial es y.*

Dado el anterior teorema, queda claro que cuando las preferencias son estrictamente convexas, uno puede definir una función de demanda $x : \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^L_+$. Cuando esta condición no se satisface, lo máximo que uno puede es establecer una correspondencia de demanda. El teorema 3 implica que tal correspondencia es de valores convexos.

- Es fácil ver que la función de demanda Marshaliana es homogénea de grado cero.

Ejemplo 9 (Geometría del problema del cosumidor) *A partir de la figura típica del problema del cosumidor es fácil deducir la ley de la demanda para bienes normales (esto es, para bienes tales que al aumentar el ingreso aumenta la demanda por ellos). Sin embargo, no hay nada de la teoría desarrollada hasta este punto que implique la ley de la demanda como se conoce tradicionalmente: entre mayor sea el precio de un bien, menor es la demanda por éste.*

La propiedad de monotonicidad estricta tiene como consecuencia el siguiente teorema.

Teorema 5 (Ley de presupuesto balanceado) *Si u es estrictamente monótona y x resuelve el problema de optimización a precios p e ingreso y, entonces $p \cdot x = y$.*

Prueba. Queda como ejercicio. ■

El siguiente teorema ofrece una caracterización parcial de la solución al problema del consumidor (condiciones necesarias).

Teorema 6 (Kuhn - Tucker) *Consideremos el siguiente problema:*

$$\begin{aligned} & \max f(x,a) \\ & s.a \\ g^j(x,a) \geq & \ 0, \ j = 1, ...k \end{aligned}$$

donde $f, g^j : R^n \times R^m \rightarrow R$ son funciones continuamente diferenciables. Sea $\mathcal{L}(x, a, \lambda) = f(x, a) + \lambda \cdot g(x, a)$. Fijemos a y sea una solución al problema de optimización tal que el conjunto de vectores $\nabla g^j(x^*, a)$, cuando la restricción se da con igualdad, es linealmente independiente. Entonces existe $\lambda^* \in R^k$ tal que

1. $\frac{\partial \mathcal{L}(x^*,\lambda^*)}{\partial x_i} = 0,\ i = 1, ...n$
2. $\frac{\partial \mathcal{L}(x^*,\lambda^*)}{\partial \lambda_j} \geq 0,\ j = 1, ...k$
3. $g^j(x, a) \geq 0,\ \lambda_j^* g^j(x, a) = 0,\ j = 1, ...k.$
4. $\lambda^* \geq 0$ *si* x^* *es un máximo.*

Siendo más formales deberíamos de escribir x^* como una función del vector a, $x^*(a)$.

Nota técnica 1 *El anterior teorema se se puede extender al caso en el que f, g^j son funciones tales que $f, g^j : D \times R^m \rightarrow R$ donde $D \subset R^n$ y x^* esta en el interior de D. Esta es la forma como típicamente usamos el teorema en la teoría del consumidor donde $D = R^n_+$ y suponemos que $x^* >> 0$.*

Ejercicio 10 *Consideremos el siguiente problema:*

$$\begin{array}{rcl} & & \max u(x) \\ & & s.a \\ y & \geq & p \cdot x \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

donde $u : R^L \rightarrow R$. Sea $\mathcal{L}(x, \lambda) = u(x) + \lambda(y - p \cdot x)$ y supongamos que u es continuamente diferenciable. Si $x^* >> 0$ es una solución al problema del cosumidor entonces por el teorema de Kuhn-Tucker las siguientes condiciones son necesarias: existe $\lambda^* \geq 0$ tal que:

1. $\frac{\partial \mathcal{L}(x^*,\lambda^*)}{x_i} = 0.$
2. $\frac{\partial \mathcal{L}(x^*,\lambda^*)}{\lambda_i} \geq 0.$
3. $\lambda^*(y - p \cdot x^*) = 0.$

La tercera condición es inocua cuando se cumple la ley de presupuesto balanceado. Cuando u es estrictamente creciente entonces $\lambda^* >> 0$ y cuando la función de utilidad es cuasicóncava y $\lambda^* >> 0$ entonces las condiciones anteriores también son suficientes.

Ejemplo 10 *(Función de utilidad Cobb-Douglas). Sea $u(x_1, ..., x_L) = x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_L^{\alpha_L}$ donde $\alpha_i > 0$ para todo i y $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Entonces la función de demanda marshalliana es $x(p, y) = y\left(\frac{\alpha_1}{p_1}, ... \frac{\alpha_L}{p_L}\right)$.*

Ejercicio 11 *(Función de utilidad con elasticidad constante de sustitución CES). Sea* $u(x_1, x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$, $\rho < 1$, $\rho \neq 0$. *El parámetro* σ *determina la eslaticidad intertemporal de sustitución* $\sigma = \frac{1}{1-\rho}$.

1. *Mostrar que* u *representa preferencias estrictamente monótonas y estrictamente convexas.*

2. *Calcular la demanda Marshalliana.*

Finalmente otro resultado que será muy importante es:

Teorema 7 (Continuidad de la demanda) *Dada* u *es estrictamente cuasicóncava, la función de demanda* $x : \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^L_+$ *es continua.*

Prueba. La prueba es una aplicación del teorema del máximo. ■

3.1. Resumen y resultados principales

Dada la importancia de algunas características de las relaciones de preferencia, de ahora en adelante vamos hacer los siguientes supuestos sobre las preferencias del consumidor.

Condición 1 (Preferencias Neoclásicas) *Las relaciones de preferencia de los consumidores satisfacen:*

1. *Racionales y continuas (luego representables por una función de utilidad continua).*

2. *Estrictamente monótonas y estrictamente convexas (luego cualquier función de utilidad que las represente es estrictamente monótona y estrictamente cuasicócava).*

   En este caso diremos que la relación de preferencia de cada consumidor es una relación de preferencia Neoclásica.

Las implicaciones de estos supuestos las hemos discutido ampliamente. En la práctica, la teoría es bastante más sencilla si asumimos:

Condición 2 (Diferenciabilidad de la demanda) *La demanda marshalliana es una función continuamente diferenciable en* $\mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_{++}$. *Es decir, todas sus derivadas parciales existen y son continuas.*

Esta hipótesis de la demanda Marshalliana también se puede deducir de supuestos sobre las relaciones de preferencia o las funciones de utilidad que las representan. No exploraremos el tema por ser bastante técnico y no tan relevante en la práctica.

Los siguientes dos teoremas encierran las propiedades más importantes de la demanda Marshalliana.

Teorema 8 *Sea* $x : R_{++}^L \times R_+ \to \mathbb{R}_+^L$ *la demanda Marshalliana correspondiente a una relación de preferencia neoclásica. Entonces*

1. *x es una función continua.*
2. *x es homogénea de grado cero (como función de ambos argumentos).*
3. *Ley del resupuesto balanceado:* $p \cdot x(p, y) = y$ *para todo* $(p, m) \in R_{++}^L \times R_+$

Por compleititud incluimos el siguiente resultado que sólo será importante cuando hablemos de la existencia del equilibrio competitivo en una economía de intercambio.

Teorema 9 *Sea* $x : R_{++}^L \times R_+ \to \mathbb{R}_+^L$ *la demanda marshalliana correspondiente a una relación de preferencia Neoclásica y* $\{p_n\}_{n=1,\dots}$ *una secuencia de precios en* R_{++}^L. *Si* $p_n \to p \in \partial R^L$ *y* $y > 0$ *entonces* $\left\{ \sum_{i=1}^{L} x_i(p_n, y) \right\}_{n=1\dots}$ *es una sucesión no acotada.*

Ejercicio 12 *Encontrar la demanda Marshalliana cuando la función de utilidad es:*

1. $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$.
2. $u(x_1, x_2, x_3) = \text{mín}\{2x_1, x_2, x_3\}$.

3.2. Función de utilidad indirecta

La función de utilidad indirecta se define como la función valor del problema del consumidor:

$$v(p, y) = \max_{x \in B(p,y)} u(x)$$

La importancia de la función de utilidad indirecta será clara más adelante cuando estudiemos el bienestar del consumidor en diferentes circunstancias. Adicionalmente, como veremos en esta sección y cuando estudiemos el problema de identificación, la función de utilidad indirecta resume gran parte de la información contenida en el problema del consumidor. El siguiente resultado es la clave para deducir varias de sus propiedades.

Teorema 10 (Envolvente) *Considere el siguiente problema de optimización:*

$$\begin{aligned} M(a) &= \max_x f(x, a) \\ & \quad s.a \\ g(x, a) &= 0 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

donde a es un vector de parámetros dados, x es un vector de escogencia y f y g son funciones continuamente diferenciables en el vector de parámetros a.

1. *Para cada vector de parámetros a supongamos que* $x(a) >> 0$ *es un vector que resuleve el anterior problema, es único y es continuamente diferenciable en su argumento.*

2. *Supongamos que* $\lambda(a)$ *son los multiplicadores de Lagrange definidos en el teorema 6.*

Entonces:

$$\frac{\partial M}{\partial a_i} = \frac{\partial \mathcal{L}(x, \lambda, a)}{\partial a_i} \mid_{x=x(a), \lambda=\lambda(a)}$$

donde $\mathcal{L}(x, \lambda, a) = f(x, a) + \lambda g(x, a)$.

Ejemplo 11 (El problema del consumidor) *Sea* $a = (p, y)$, $f(x, p, y) = u(x)$ *y* $g(x, p, y) = y - p \cdot x$. *Es fácil verificar usando el teorema de la envolvente que:*

$$x_i(p, y) = -\frac{\frac{\partial v(p,y)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(p,y)}{\partial y}}$$

ecuación conocida como identidad Roy.

Ejemplo 12 (Cobb - Douglas) *Verificar la identidad de Roy para el caso de la función de utilidad Cobb -Douglas de dos bienes.*

Proposición 1 (Propiedades de la función de utilidad indirecta) *La función de utilidad indirecta satisface:*

1. *Es continua.*

2. *Homogénea de grado cero en* (p, y).

3. *Creciente en* y.

4. *Decreciente en* p.

5. *Cuasiconvexa.*

6. *Satisface la identidad de Roy.*

Prueba. Los numerales 1, 3, 4 y 6 son consecuencias inmediatas del teorema 6 y del teorema de la envolvente. El numeral 2 es una consecuencia de la ley de Walras o presupuesto balanceado. Ahora consideremos la afirmación del numeral 5. Tenemos que demostrar que:

$$v(p_{(\lambda)}, y_{(\lambda)}) \leq \max(v(p_1, y_1), v(p_2, y_2))$$

donde $p_{(\lambda)} = \lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2$ y $y_{(\lambda)} = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2$. Es fácil ver que $B(p_{(\lambda)}, y_{(\lambda)}) \subset B(p_1, y_1) \cup B(p_2, y_2)$. El resultado se sigue de forma inmediata. ■

4. Demanda Hicksiana

El problema del consumidor se puede escribir de una forma equivalente (dual). La equivalencia entre las dos formas será el objeto de la próxima sección. En esta sección nos concentramos en su intepretación y relevancia para la teoría del consumidor.

El *problema de minimización del gasto* (el problema dual del problema del consumidor - DPC) es:

$$\begin{aligned} e(p,\mu) &= \min_{x \in R_{+}^{L}} p \cdot x \\ & \quad s.a \\ u(x) &\geq \mu \end{aligned}$$

donde μ es el mínimo nivel de utilidad que se desea satisfacer, $e(p,\mu)$ es la función de gasto mínimo (o simplemente la funcion de gasto) y todas las demás variables tienen el mismo significado que en las secciones anteriores.

- Obsérvese que la solución a este problema siempre existe y que además la cesta que minimiza el gasto es siempre única.
- La solución (cesta que minimiza) a este problema la llamamos la demanda compensada o Hicksiana y la denotamos por $x^h(p,\mu)$.

Ejemplo 13 (Geometría del problema dual del cosumidor) *. A partir de la figura típica del problema dual del problema del cosumidor es fácil deducir la ley de la demanda en términos de la demanda Hicksiana. Más adelante vamos a demostrar que esta ley de la demanda es independiente de las características del bien (como ser un bien normal o inferior).*

Proposición 2 (Propiedades de la función de gasto) *La función de gasto satisface:*

1. *Es continua.*
2. *Creciente en μ.*
3. *Homogénea de grado uno en p.*
4. *Cóncava p.*
5. *Satisface el lema de Shephard:*

$$x_i^h(p,\mu) = \frac{\partial e\,(p,\mu)}{\partial p_i}$$

Prueba. Los numerales 1, 2, y 5 son fáciles de deducir del teorema 6 y del teorma de la envolvente (esto queda como ejercicio para el lector). El numeral

3 es inmediato. Más ilustrativo es la demostración del numeral 4. Queremos demostrar que:

$$e(p_{(\lambda)}, \mu) \geq \lambda e(p_1, \mu) + (1 - \lambda) e(p_2, \mu)$$

Ahora obsérvese que por definición:

$$\begin{aligned} e(p_1, \mu) &\leq p_1 x^h(p_{(\lambda)}, \mu) \\ e(p_2, \mu) &\leq p_2 x^h(p_{(\lambda)}, \mu) \end{aligned}$$

y sumando estas dos ecuaciones se obtiene el resultado deseado. ■

Proposición 3 (Ley de la demanda Hicksiana)

$$\frac{\partial x_i^h(p, \mu)}{\partial p_i} \leq 0$$

Prueba. Es una consecuencia inmediata del lema de Shephard y la concavidad en precios de la función de gasto. ■

Ejemplo 14 (Cobb - Douglas) *En el caso de funciones de utilidad Cobb - Douglas las demandas Hicksianas son:*

$$\begin{aligned} x_1^h(p, \mu) &= \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\alpha} \mu \\ x_2^h(p, \mu) &= \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\alpha} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-\alpha} \mu \end{aligned}$$

y la función de gasto es:

$$e(p, \mu) = p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha} \mu \left(\frac{1}{\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}}\right).$$

5. Dualidad y descomposición de la demanda

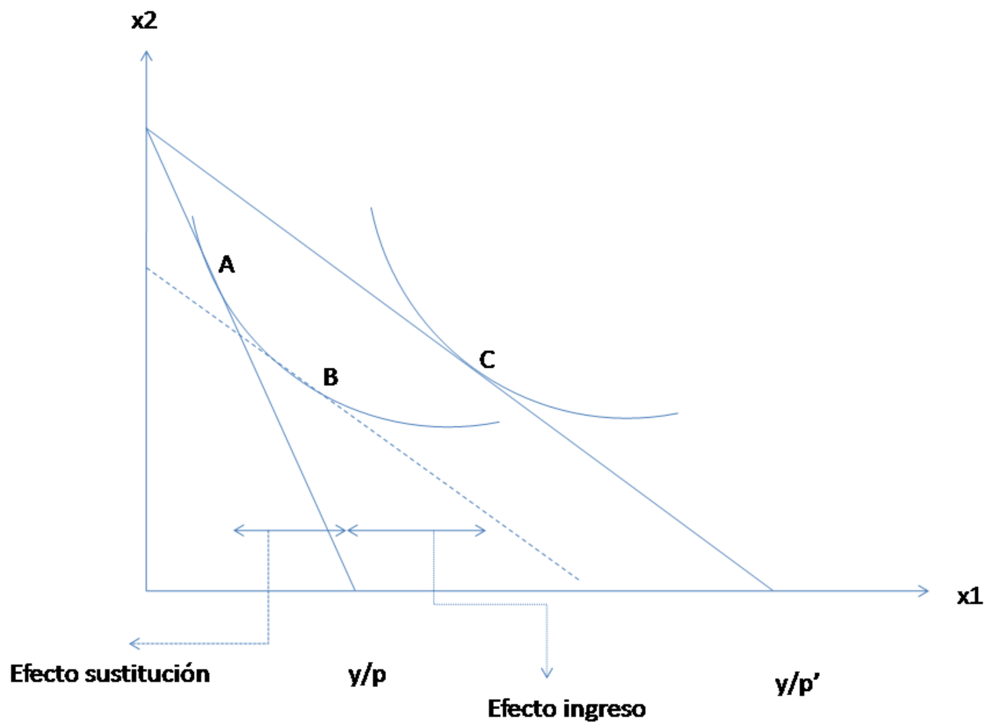
La siguiente proposición resume la relación entre los dos problemas.

Proposición 4 (Dualidad) *Las siguientes ecuaciones establecen la relación entre las dos formas de abordar el problema de consumidor.*

1. $v(p, e(p, \mu) = \mu$.
2. $e(p, v(p, y)) = y$.
3. $x_i(p, y) = x_i^h(p, v(p, y))$.
4. $x_i^h(p, \mu) = x_i(p, e(p, \mu))$.

5.1. Descomposición de la demanda en el efecto ingreso y sustitución

- El cambio en la demanda de un agente debido al cambio en precios relativos suponiendo que este mantiene su mismo nivel de utilidad se conoce como el efecto sustitución (es decir la variación en la demanda Hicksiana).
- Aquella parte de la demanda Marshaliana que no la explica el efecto sustitución se denomina el efecto ingreso. Ésta corresponde al cambio en la demanda debido al cambio en el ingreso real del agente debido a un cambio en precios. Intutitivamente, al aumentar o disminuir los precios el agente puede asignar más o menos recursos al consumo de todos los bienes.


x2
A
B
C
x1
Efecto sustitución
y/p
Efecto ingreso
y/p’

- El siguiente teorema establece la relación más importante de la teoría de la demanda.

Teorema 11 (Slutsky)

$$\frac{\partial x_i\left(p,y\right)}{\partial p_j}=\frac{\partial x_i^h\left(p,\mu\right)}{\partial p_j}-x_j\left(p,y\right)\frac{\partial x_i\left(p,y\right)}{\partial y}$$

donde $\mu = u(x(p,y))$. *El primer término representa el efecto sustitución y el segundo el efecto ingreso.*

Prueba. Por la proposción 4:

$$x_i^h\left(p,\mu\right)=x_i\left(p,e(p,\mu)\right)$$

Ahora:

1. Derivamos ambos lados con respecto a p_j,

$$\frac{\partial x_i^h\left(p,\mu\right)}{\partial p_j}=\frac{\partial x_i\left(p,e(p,\mu)\right)}{\partial p_j}+\frac{\partial x_i\left(p,e\left(p,\mu\right)\right)}{\partial y}\frac{\partial e\left(p,\mu\right)}{\partial p_j}$$

2. Utilizamos la identidad de Shephard para eliminar las derivadas de la función de gasto.
3. Utilizamos $e(p,v(p,y))=y$.
4. Utilizamos $x_i(p,y)=x_i^h(p,v(p,y))$.

■

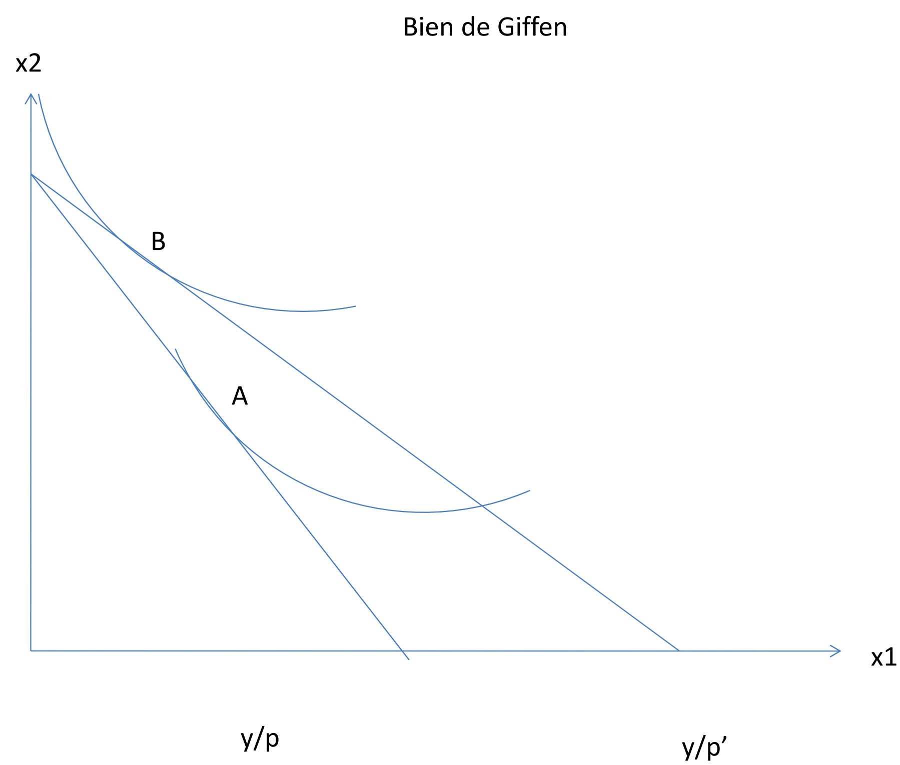
5.2. Aplicación: la ley de la demanda

- Utilizando la ecuación de Slutsky es posible precisar más la ley de la demanda.
- Anteriormente obervamos que no habian nada en la teoría desarrollada hasta el momento que implicara la ley de la demanda para la función de demanda Marshalliana (véase ejemplo abajo). Es decir, la ley de la demanda es consistente con la teoría del consumidor pero no es necesaria a partir de la hipótesis que hemos hecho hasta el momento. En efecto, esta caracerística puede intepretarse realmente como una virtud, pues encierra algunos fenómenos conocidos en los mercados reales.

Ejemplo 15 (Bienes de Giffen) *Se denominan bienes de Giffen aquellos para los cuales no se cumple la ley de la demanda.*[4] *El ejemplo clásico es la demanda por papa. Intuitivamente, al aumentar el precio de la papa, el efecto ingreso*

[4]Debido a Giffen (1837-1910), economista Escocés.

es tan fuerte que dejan de consumir otros bienes de consumo más costosos y aumentan su demanda por papa para suplir las deficiencias alimenticias. Es decir, intuitivamente un bien de Giffen debe ser un bien inferior. La figura bajo ilustra el cambio de la demanda en presencia de un bien de Giffen.



- Las siguientes observaciones son inmediatas a apartir de la ecuación de Slutsky:
    - Si un bien es normal el efecto ingreso refuerza el efecto sustitución.
    - Para que un bien sea de Giffen es necesario que sea un bien inferior. Más aún, el efecto ingreso debe dominar el efecto sustitución.

5.3. Aplicación: Bienestar individual

- La funcion de utilidad indirecta permite definir una medida natural de cambios en bienestar individual.
- Por ejemplo, supongamos que el precio de un bien cambia de p^0 a p^1 manteniendo todos los demás precios constantes (esto puede ser consecuencia de una política de tributación o subsidios): $p^1 < p^0$
- Sea $v(p^0, y^0)$ y $v(p^1, y^0)$ la utilidad indirecta antes y después del cambio en precios cuando el ingreso del individuo es y^0 (por simplicidad ignoramos todos los demás precios).
- Recordemos que v es una función decreciente en precios y creciente en el ingreso.
- Una medida natural del cambio en bienestar del agente es:

  $$v(p^1, y^0) - v(p^0, y^0)$$

  pero recordemos que la función de utilidad indirecta es no observable y es apenas una medida ordinal.
- Alternativamente, una medida denominada en unidades del numerario de la economía es el ingreso $CV(p^0, p^1, y^0) \leq 0$ con el que habría que compensar a un agente para ser indiferente ante el cambio:

  $$\begin{aligned} v(p^0, y^0) &= v(p^1, y^0 + CV(p^0, p^1, y^0)) \\ &= v(p^1, y^1) \end{aligned}$$

- Esta medida de bienestar se llama la variación compensada de Hicks.
- Ahora obsérvese que:

  $$\begin{aligned} e(p^1, v(p^0, y^0)) &= e(p^1, v(p^1, y^0 + CV(p^0, p^1, y^0)) \\ &= y^0 + CV(p^0, p^1, y^0) \end{aligned}$$

  de otra parte:

  $$e(p^0, v(p^0, y^0)) = y^0$$

  luego:

  $$\begin{aligned} CV(p^0, p^1, y^0) &= e(p^1, v(p^0, y^0)) - e(p^0, v(p^0, y^0)) \\ &= \int_{p^0}^{p^1} \frac{\partial e(p, v(p^0, y^0))}{\partial p} dp \\ &= \int_{p^0}^{p^1} x^h(p, v(p^0, y^0)) dp \end{aligned}$$

- La dificultad con esta caracterización de la variación compensada es que la demanda Hicksiana no es observable.

- Si recordamos la geometría de la demanda Marshalliana y Hicksiana no es aventurado hacer la siguiente aproximación (y sí es bien útil):

$$CV(p^0, p^1, y^0) \approx \int_{p^0}^{p^1} x(p, v(p^0, y^0))dp$$

- La gran ventaja de esta aproximación es que la demanda Marshalliana sí es una función observable.

5.4. El costo en bienestar de la inflación anticipada

- La variación compensada es un concepto muy útil con muchas aplicaciones. Aquí vamos a dar una aplicación a un área aparentemente distante de los temas principales de estas notas. En efecto, esta aplicación pone de manifiesto la relevancia de las ideas microecnómicas para el estudio de la macroeconomía.

- Supongamos que existe un agente representativo de la economía que deriva utilidad de los saldos reales de dinero (esto no es absolutamente necesario pero si hace la discusión bastante más directa).

- La función de demanda por saldos reales es:

$$m(r) = Ae^{-Br}$$

  donde r es la tasa de interés nominal de la economía y A y B son contantes positivas. Entre mayor es la tasa de interés menor es la demanda por saldos reales.

- Por la ecuación de Fischer, la tasa de interés nominal, las tasa de interés real R y la inflación esperada π^e están relacionadas por la siguiente ecuación:

$$r = R + \pi^e$$

- La teoría económica afirma que, por lo menos en el largo plazo, la tasa de interés real está determinada por factores reales (la razón capital trabajo, la productividad de la economía, etc).

- Luego, *ceteris paribus*, son las expectativas de inflación las que determinan la tasa de interés nominal. Ésta, a su vez, la determina la política monetaría.

- Supogamos que la autoridad monetaria implementa una política restrictiva de reducción de la inflación (y por lo tanto de la expectativas de inflación). Esto tiene como consecuencia que la tasa de interés nominal pasa de r^0 a r^1, $r^1 < r^0$.

- La pregunta que nos hacemos es ¿Cuál es la ganancia en bienestar (o costo) de reducir la inflación en una cantidad $r^0 - r^1$?

- Es muy interesante que lo que hemos estudiado hasta este momento permite dar una respuesta muy sencilla a esta pregunta. La variación compensada CV es:

$$CV = \int_{r^0}^{r^1} m(r)dr$$

- Luego la ganancia en bienestar es $|CV|$.

6. Restricciones observables, integrabilidad e identificación

6.1. Restricciones observables

- En esta sección resumimos tres resultados de carácter general que en principio podrían ser utilizados para responder la siguiente pregunta: ¿Dada una función $x : R_+^L \times R \to R_+^L$ cuando podemos afirmar que ésta no es la demanda Marshalliana del problema de un consumidor con preferencias Neoclásicas? Este es el problema falsebilidad de la teoría del consumidor.

- Las siguentes son tres implicaciones de la teoría cuando las preferencias son Neoclásicas:

  1. La demanda es homogénea de grado cero.
  2. La demanda satisface la ley de presupuesto balanceado.
  3. La matriz de Slutsky:

  $$s(p, y) = \left(\frac{\partial x_i \left(p, y\right)}{\partial p_j} + x_j \left(p, y\right) \frac{\partial x_i \left(p, y\right)}{\partial y} \right)_{i,j}$$

     es simétrica y negativa semidefinida.

  La tercera implicación requiere una demostración. Por la ecuación de Slutsky la matriz de Slutsky es igual a la matriz de sustitución de Hicks:

  $$\sigma(p, \mu) = \left(\frac{\partial x_i^h \left(p, \mu\right)}{\partial p_j} \right)_{i,j}$$

  que es simétrica por el lema de Shephard y el teorema de Young[5]. Además, es negativa semidefinida porque la función de gasto es cóncava en los precios.

- Ahora, dado que hemos resaltado tres implicaciones importantes de la teoría del cosumidor, surgen ciertas preguntas naturales:

  1. ¿Son estas tres implicaciones independientes entre ellas?
  2. ¿Existe alguna otra implicación de la teoría del consumidor independiente de las tres mencionadas?
  3. Si no existen otras implicaciones, quiere decir esto que si una función satisface estas tres afirmaciones esto implica que existen preferencias neoclásicas tales que la demanda Marshalliana satisface estas relaciones?

[5]Véase el Apéndice matemático de [JR].

- Por lo pronto vamos a demostrar que la propiedad de homogeneidad de grado cero se deriva de las otras dos propiedades. Éste es un resultado muy sorprendente!

Teorema 12 (Homogeneidad de grado cero no es independiente) *Sea $x(p, y)$ una función que satisface la ley de presupuesto balanceado y que la matriz de Slutsky es simétrica. Entonces esta función es homogénea de grado cero.*

Prueba. Derivando la ecuación que establece que el presupuesto se balancea obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_j p_j \frac{\partial x_j(p,y)}{\partial p_i} &= -x_i(p,y) \\ \sum_j p_j \frac{\partial x_j(p,y)}{\partial y} &= 1 \end{aligned}$$

Ahora definamos $f(t) = x(tp, ty)$, $t > 0$. El objetivo es demostrar que para todo t, $f'(t) = 0$. Derivando f obtenemos:

$$f_i'(t) = \sum_j p_j \frac{\partial x_i(tp,ty)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(tp,ty)}{\partial y} y$$

Utilizando que el presupuesto se balancea eliminamos y del segundo término de esta ecuación y obtenemos:

$$f_i'(t) = \sum p_j \left(\frac{\partial x_i(tp,ty)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(tp,ty)}{\partial y} x_j(tp,ty) \right)$$

Los términos entre paréntesis son los elementos de la ecuación de Slutsky luego por simetría:

$$f_i'(t) = \sum p_j \left(\frac{\partial x_j(tp,ty)}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j(tp,ty)}{\partial y} x_i(tp,ty) \right)$$

y utilizando las primeras dos ecuaciones de esta demostración es fácil ver que $f_i'(t) = 0$. ■

6.2. Integrabilidad e indentificación

- El problema de integrabilidad consiste en describir las condiciones bajo las cuales el comportamiento observado (i.e., la escogencia como función de precios de un agente) es racionalizable con una estructura de escogencia que satisface las propiedades usales (preferencias racionales, convexas y representables por una función de utilidad monótona).
- El primer paso con miras a resolver el problema de integrabilidad es la siguiente proposición que profundiza sobre la relación entre el problema PC y el DPC.

Proposición 5 *Sea* $e : R^L_{++} \times R_+ \to R$ *una función que satisface todas la propiedades de una función de gasto (véase teorema 1.7 de [JR]). Definamos:*

1. $A(p,\mu) = \left\{ x \in R^L_+ : p \cdot x \geq e(p,u) \right\}.$
2. $A(\mu) = \underset{p \in R^L_{++}}{\cap} A(p,\mu).$

Entonces la función $u : R^L_+ \to R$ *definida por:*

$$u(x) = \text{máx} \left\{ \mu \geq 0 : x \in A(\mu) \right\}$$

es creciente, no acotada por encima, cuasicóncava y e *es la función de gasto asociada a* u *en el problema dual del consumidor.*

- El punto importante de este teorema es que establece condiciones para poder recuperar la función de utilidad de un consumidor con preferencias que satisfacen las propiedades típicas.
- En efecto, una vez recuperamos la función de utilidad, podemos resolver el PC y así obtener las demandas Marshallianas. Alternativamente, podemos utilizar el lema de Shephard utilizar el teorema de dualidad (proposición 4, item 3), invertir la función de gasto para obtener la función de utilidad indirecta y utilizando el lema de Roy diferenciar para obtener las demandas Marshalianas.
- La importancia del anterior resultado se puede apreciar del papel que juega en el siguiente teorema.

Teorema 13 (Integrabilidad) *Una función coninua* $x : R^L_{++} \times R_{++} \to R^L_+$ *es la demanda Marshaliana generada por una función de utilidad creciente y cuasicóncava si satisface la propiedad de presupuesto balanceado y la matriz de Slutsky asociada es simétrica y negativa semidefinida.*

Prueba. La idea de la prueba es:

1. Resolver (para $e\,(p,\mu)$) el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (que motiva el lema de Shephard):

$$x^h_i(p,\mu) = \frac{\partial e\,(p,\mu)}{\partial p_i}$$

2. Utilizar el anterior teorema de dualidad para recuperar la función de utilidad.

■

6.3. Resumen

- El problema de refutabilidad consiste en establecer condiciones (o reestricciones) en las escogencias de un consumidor, para las cuales no sea posible recuperar preferencias que satisfagan las propiedades usuales, tales que éstas sean consistentes con las escogencias observadas. En este caso se dice que la teoría es refutable. Esta es una condición necesaria, para poder considerar la teoría del consumidor que hemos desarrollado una teoría científica.

- Afortunadamente, la teoría del cosumidor es refutable. Esto será evidente cuando introduzcamos una aproximación alternativa a la teoría del consumidor basada en el axioma débil de preferencias reveladas.

- Más precisamente, la hipótesis de comportamiento en la teoría del consumidor es decir, que el agente maximiza una función de utilidad sujeto a su reestricción presupuestal, es refutable. Obsérvese que la hipótesis mencionda, no supone que la función de utilidad sea monótona ni cuasicóncava pues estas dos hipótesis no añaden reestricciones adicionales a la teoría (veáse [JR] sección 2.1.2). La idea es fundamentalemente la siguiente: supongamos que el comportamiento observado de escogencia de un agente es consistente con la hipótesis de comportamiento del consumidor con una función de utilidad continua (no necesariamente monótona y cuasicóncava), entonces se puede demostrar que existe una función de utilidad monótona y cuasiconcava tal que el comportamiento del cosumidor es consistente con el comportamiento observado.

- El problema de identificación en la teoría del consumidor consiste en determinar si, dadas unas escogencias observables, no existe más de una función de utilidad (que representan preferencias *distintas*) tales que el comportamiento de escogencia observado es consistente con ambas (a la luz de la teoría del consumidor). Por el momento dejaremos de lado este problema en el contexto de la teoría del consumidor y lo estudiaremos con detalle más adelante en el contexto de la teoría del equilibrio general.

7. Preferencias reveladas y la teoría del consumidor

- Una característica notoria de la teoría del consumidor desarrollada hasta este punto es que algunos elementos básicos de la teoría como son las preferencias de los individuos, no son observables.

- Una teoría alterna es la propuesta por Samuelson en su libro *Foundations of Economic Analysis* (1947).

- El punto de partida de esta teoría es el axioma débil de preferencias reveladas (WARP por sus siglas en ingles).

Axioma 1 (WARP) *Las escogencias de un consumidor satisfacen WARP si para todo par de escogencias x_0, x_1, $x_0 \neq x_1$ a precios p_0, p_1 respectivamente, se cumple:*

$$p_0 \cdot x_1 \leq p_0 \cdot x_0 \Rightarrow p_1 \cdot x_0 > p_1 \cdot x_1$$

- Intutivamente, si cuando los precios son p_0 y x_0, x_1 son ambos factibles pero el agente revela que prefiere (estrictamente) x_0 a x_1, entonces x_0 no puede ser factible cuando los precios son p_1.
- La siguiente figura muestra dos casos de obervaciones de precios y cantidades. En la primera figura las escogencias satisfacen WARP y en la segundo no.
- Refutabilidad de la hipótesis de comportamiento en la teoría del consumidor. Las escogencias de la figura (b) son inconsistentes con la hipótesis de comportamiento en la teoría del consumidor.
- Ahora investigamos si las escogencias que se derivan de un consumidor con preferencias Neoclásicas son consistentes con WARP.

Proposición 6 *Un consumidor con preferencias racionales y estrictamente convexas satisface WARP.*

Prueba. Suponga que se cumplen las hip'otesis de WARP entonces no puede ser verdad que x_1 sea preferible (d'ebilmente) a x_0 pues por la convexidad estricta de las preferencia cualquier combinación convexa x_0 y x_1 seria factible cuando los precios son p_0 y estrictamente preferible a x_O, una contradicción. Luego x_0 debe ser estrictamente preferible a x_1 y por lo tanto no debe ser factible cuando los precios son p_1. Hemos usado que las preferencias son completas y estrictamente convexas. ■

- La consecuencias del axioma débil de preferencias reveladas pueden ser bastante fuertes. Por ejemplo, suponga que $x(p, y)$ denota una función de escogencia de un consumidor (no necesariamente una demanda Marshaliana, simplemente una función de precios e ingreso). Suponga además que satisface la propiedad de presupuesto balaceado, entonces se puede demosrar que la función de escogencia es homogénea de grado 0.
  Para demostrar esto sea $x^0 = x(p^0, y^0)$, $x^1 = x(tp_{0,ty^0)}$ entonces por la hipótesis de presupuesto balanceado se sigue que $x^1p^0 = x^0p^0$. Ahora por WARP, si $x^0 \neq x^1$ entonces $x^0p^0 > x^1p^0$.
- Adicionalmente, se puede demostrar que la matriz de Slutsky es semidefinida negativa.
- Si se pudiera demostrar que la matriz de Slutsky es simétrica habríamos demostrado que WARP y la propiedad de presupuesto balanceado son equivalentes a la teoría del consumidor. Sin embargo, para esto, es necesaria hacer una hipótesis ligeramente más fuerte que WARP. Esta se

denomina el axioma fuerte de preferencia reveladas, $SARP$ por sus siglas en ingles[6].

Axioma 2 (SARP) *Las escogencias de un consumidor satisfacen SARP si para todo conjunto finito de escogencias* $(x^i, p^i)_{i=0,1,\ldots,n}$ *si* $x^i p^{i-1} \leq x^{i-1} p^{i-1}$, $x^{i-1} \neq x^i$, $i = 1, 2, \ldots n$ *entonces* $x^1 p^n \geq p^n x^n$

- Intutivamente, si cuando los precios son p_i y x_{i-1}, x_i son ambos factibles pero el agente revela que prefiere (estrictamente) x_i a x_{i-1}, entonces por transitividad x_1 no puede ser factible cuando los precios son p_i.

- SARP se cumple para preferencias racionales (completas y transitivas) y estrictamente convexas.

- El analísis anterior se basa en la posibilidad de observar una función de escogencia. Cuando nos restringimos a un conjunto finito de datos, los resultados análogos dependen del siguiente axioma que es una versión ligeramente más débil que SARP.

Axioma 3 (GARP) *Las escogencias de un consumidor satisfacen GARP si para todo conjunto finito de escogencias* $(x^i, p^i)_{i=0,1,\ldots,n}$ *si* $x^i p^{i-1} \leq x^{i-1} p^{i-1}$, $x^{i-1} \neq x^i$, $i = 1, 2, \ldots n$ *entonces* $x^1 p^n \geq p^n x^n$

- Intutivamente, si cuando los precios son p_i y x_{i-1}, x_i son ambos factibles pero el agente revela que prefiere (puede ser débilmente) x_i a x_{i-1}, entonces por transitividad x_1 no puede costar estrictamente menos que x_n cuando los precios son p_n.

- GARP se cumple para preferencias racionales localmente no saciadas (en particular para preferencias estrictamente convexas).

- El teorema de Afriat (1976) demuestra que todo conjunto de datos finito satisface GARP si y s'olo si existe una función de utilidad, localmente no saciable, continua, creciente y cóncava que racionaliza los datos. En este caso pueden existir muchas funciones de utilidad (que nos son transformaciones monótonas entre si) que racionalizan los datos.

[6] La implicación importante del SARP es que elimina la posibilidad de cíclos (preferencias no transitivas) en las escogencias de un consumidor.